Ecuaciones en educación primaria: No todo es simbolismo alfanumérico[1]

Luis Radford
Laurentian University, Ontario (Canadá)

Resumen

La introducción precipitada del simbolismo alfanumérico conduce a menudo a una incomprensión de las ideas fundamentales del álgebra. Presentamos un diseño que favorece un primer encuentro con ecuaciones algebraicas a partir de historias-problemas representadas concretamente. El diseño se basa en la complejidad conceptual creciente de los problemas y en una configuración fuertemente social del aula.

INTRODUCCIÓN

Al abordar el tema de la enseñanza del álgebra, uno de mis estudiantes del profesorado se mostró ansioso. Explicó: «en la escuela, me iba muy bien en matemáticas, ¡hasta que empezamos a estudiar álgebra!». Testimonios como este son muy frecuentes y están relacionados con una mala experiencia: la falta de comprensión de las ideas algebraicas fundamentales.

A menudo, esta incomprensión es provocada por la introducción apresurada del simbolismo algebraico en la escuela.

En los últimos quince años, junto con mi equipo de investigación, que incluye profesores de escuela primaria, hemos reflexionado y experimentado enfoques para la enseñanza del álgebra. Una idea central de nuestra aproximación es que no es ni necesario ni suficiente utilizar el simbolismo alfanumérico para pensar algebraicamente. Partiendo de esta idea, respaldada por investigaciones históricas, hemos concebido un diseño de actividades en torno al concepto de ecuación en educación primaria el cual parte de representaciones visuales concretas. El objetivo de este artículo es presentar los elementos principales de este diseño.

PRINCIPIOS DEL DISEÑO

Todo diseño pedagógico se apoya en una teoría del aprendizaje. En nuestro caso, la teoría de referencia es la teoría de la objetivación (Radford, 2023), inspirada en la escuela histórico-cultural de Vygotski (1991). Dentro de esta teoría, el elemento que explica cómo ocurre el aprendizaje es la actividad de profesores y estudiantes. Nos centramos en particular en la actividad del aula, que llamamos *actividad de enseñanza-aprendizaje*. En este contexto, un problema pedagógico importante con el que nos enfrentamos es el diseño adecuado de esta actividad.

El diseño de la actividad de enseñanza-aprendizaje incluye:

- El diseño de la tarea.
- La configuración social del aula.

---

[1] Este artículo fue publicado en Radford, L. (2024). Ecuaciones en educación primaria: No todo es simbolismo alfanumérico. Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 106, 8–14. https://www.grao.com/revistas/diseno-de-tareas-que-promueven-el-pensamiento-algebraico-78054?contenido=494415

Mientras que el diseño de la tarea tiene que ver con la calidad y el orden de los problemas matemáticos que se presentan a los estudiantes, la configuración social del aula busca asegurar la creación de un espacio de discusión matemática de alto nivel. Una tarea puede estar muy bien diseñada, pero sin una configuración social adecuada del aula, su efecto puede ser mínimo. Recíprocamente, una configuración social del aula puede ser excelente, pero sin una tarea propicia, el resultado puede estar lejos de lo esperado.

EL DISEÑO DE LA TAREA

Para introducir a los jóvenes estudiantes al álgebra, al principio, recurrimos a problemas que les permiten experimentar y reflexionar matemáticamente a través del uso de materiales concretos. Así, en lugar de presentar de inmediato las ecuaciones en su simbolismo moderno (por ejemplo, $3 + x = 7$), en nuestro diseño, las ecuaciones aparecen como representaciones concretas no simbólicas de una historia, a la que llamamos *historia-problema*.

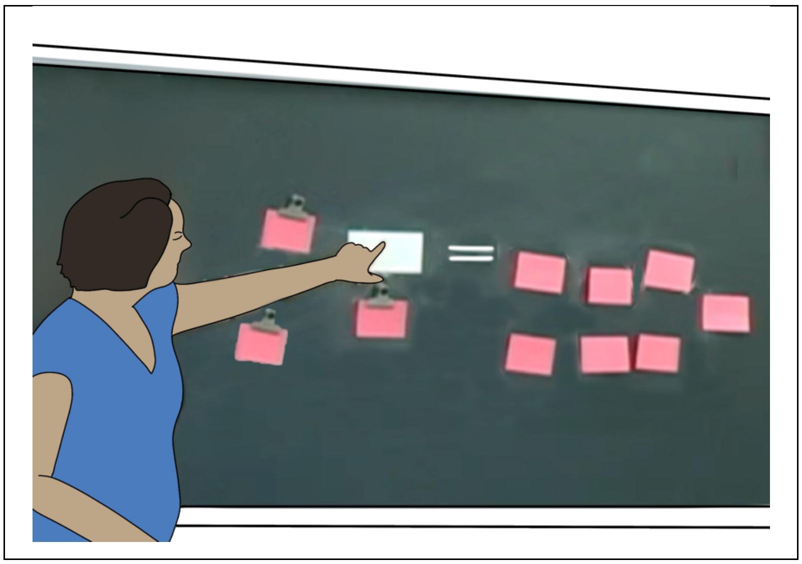

Imagen 1. La ecuación que traduce la historia-problema

Historia-problema y su representación

Así, en una de nuestras clases de tercer grado (estudiantes de 8-9 años), la maestra comenzó su lección discutiendo con la clase una historia en la que una niña, Sara, tiene un sobre que contiene algunas cartas de hockey. La maestra mostró un sobre de papel diciendo: «el sobre está sellado. No sabemos cuántas cartas contiene». Luego de pegar el sobre en la pizarra, continuó: «pero Sara ya tenía 3 cartas». Al mismo tiempo, la maestra pegó tres cartas de cartón que simulaban las cartas de hockey en la pizarra. Inmediatamente, la maestra dijo a la clase que Cristina, una amiga de Sara, tenía 7 cartas de hockey, al mismo tiempo que pegaba esas cartas al lado del sobre y de las cartas de Sara. Añadió el símbolo de igualdad entre los haberes de las dos niñas y la maestra preguntó a la clase: «¿qué significa este símbolo?». Un estudiante respondió: «significa que Sara y Cristina tienen la misma cantidad de cartas». La imagen 1 muestra la representación de la historia-problema. La representación se hace a partir de un sistema muy simple, al que llamamos *sistema semiótico concreto*.

Sistema semiótico concreto (SSC)

El SSC comprende tres objetos: sobres, cartas y el signo de igualdad. Una ventaja inmediata es que los objetos tienen un significado directo. Por ejemplo, las cartas representan de manera visible las cantidades enunciadas en la historia-problema. El sobre representa el número desconocido de cartas, es decir, la incógnita. Otra ventaja es que los estudiantes pueden hablar de cantidades desconocidas sin la dificultad de tener que introducir las letras. Aunque limitado, este sistema es suficiente para representar un buen número de historias-problema que pueden ser útiles para llevar a los estudiantes a hacer un primer contacto con las ideas algebraicas fundamentales.

Las primeras ideas algebraicas fundamentales

El encuentro de los estudiantes con las primeras ideas algebraicas fundamentales comenzó con la discusión general que llevó a escribir la ecuación que aparece en la imagen 1. Luego, la maestra pidió a los estudiantes proponer maneras de resolver la ecuación, es decir, de encontrar el número de cartas escondidas en el sobre.

Generalmente, los estudiantes proponen procedimientos basados en ideas aritméticas, como por ejemplo ensayo y error. Esto fue lo que sucedió en nuestro caso. La maestra invitó a los estudiantes a tratar de encontrar otra forma, una en la que el sobre estuviese «aislado», es decir, que estuviese colocado solo en un lado de la ecuación (despejar la incógnita). La pregunta de la maestra generó un espacio para imaginar otras posibilidades. Cyr fue a la pizarra y quitó una carta de cada lado de la ecuación. Repitió el proceso otra vez (véase la imagen 2), y, cuan- do iba a empezar el proceso por tercera vez la maestra lo detuvo y dijo:

1. MAESTRA: Quitamos una, pero eso (indicando el signo igual) dice «igual». Entonces, si quitas una carta en este lado, ¿qué haces?
2. CYR: Quito otra del otro lado.
3. MAESTRA: (Repitiendo la idea) tienes que quitar otra carta del otro lado.

Este pasaje muestra cómo Cyr despliega las acciones para aislar el sobre. Podemos ver cómo el material concreto permite realizar las acciones de despeje de manera manipulativa. «Mover» los elementos es más simple que representar las operaciones y cálculos. Los estudiantes pueden visualizar los efectos de realizar cambios a ambos lados de la igualdad.

En la línea 1, vemos que la maestra detiene a Cyr, para que verbalice las acciones y explique su significado. En la línea 3 del diálogo, vemos a la maestra enfatizando la idea que Cyr acaba de verbalizar y que es importante para entender el sentido relacional de la igualdad. Haciendo esto, la maestra se asegura de que Cyr y los otros estudiantes en el aula pueden darle sentido al procedimiento algebraico de despejar la incógnita.

Imagen 2. Cyr aislando el sobre

Igualdad y operación

Las ideas algebraicas que se han movilizado hasta este momento son:

- La consideración de *cantidades desconocidas*.
- La idea de igualdad en su sentido *relacional*.
- La *operación* de sustracción de iguales en cada lado de la ecuación.

Se ha escrito mucho sobre las dificultades que los estudiantes encuentran para entender el sentido relacional de la igualdad. Este sentido es muy diferente al *sentido procedimental*, que es el que aparece en la solución de la ecuación por ensayo y error, donde se suman 3 y otro número (como 2 o 3) para ver si el resultado es o no 7. Sin embargo, podemos ver cómo la discusión general, basada en una historia-problema y el SSC, permite a los estudiantes comprender ese sentido relacional que es fundamental en los primeros contactos con las ideas fundamentales del álgebra. En nuestro diseño, el sentido relacional va de la mano con la comprensión emergente de la operación de sustracción, como sustracción que afecta ambos lados de la igualdad, sin que se vea alterada su relación.

La complejidad conceptual creciente de la tarea

En nuestro diseño, los problemas que conforman la tarea se organizan según una *complejidad conceptual creciente*; los problemas conceptuales más complejos se presentan más tarde que los menos complejos. La idea es que, al recurrir a una organización de los problemas según una complejidad conceptual creciente, los estudiantes puedan navegar de manera significativa por niveles de conceptualización cada vez más sofisticados (en este caso, una conceptualización más sofisticada de la estrategia de aislar o despejar la incógnita).

Complejidad inicial

Ecuación E1: después de la discusión general, los estudiantes resolvieron la ecuación $x + 2 = 8$, obtenida a través de la historia-problema decía así: «para su cumpleaños, Sophie recibe un sobre que contiene varias tarjetas de hockey. Ella ya tenía dos tarjetas. Su amiga Christa tiene 8 tarjetas de hockey. Ahora ambas chicas tienen el mismo número de tarjetas». El objetivo de la ecuación E1 es hacer que los estudiantes, trabajando ahora en pequeños grupos, resuelvan una ecuación del *mismo nivel de dificultad* que la ecuación de la discusión general.

Primero se pidió a los estudiantes hacer la ecuación a través de material de manipulación puesto a su disposición (sobres y cartas). Luego se les pidió encontrar el número de cartas escondidas en el sobre aislando este. La complejidad inicial escogida en este diseño reposa en una estructura aditiva que involucra una incógnita en un lado de la igualdad.

Complejidad creciente

Enseguida, la historia-problema fue omitida y los estudiantes se encontraron frente a las tres ecuaciones E2, E3 y E4 que se muestran en la imagen 3. Se les pidió resolver esas ecuaciones aislando sobres. Como se observa, estas ecuaciones están dadas en el SSC.

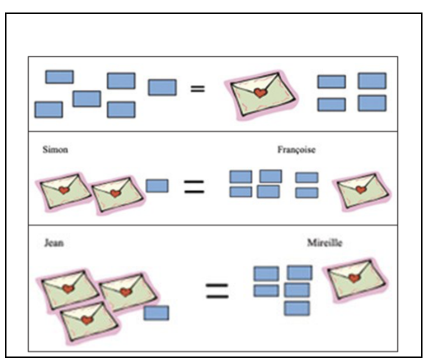

Imagen 3. Ecuaciones E1, E2, E3 dadas directamente en el SSC.

El objetivo de la ecuación E2 es continuar explorando el sentido relacional de la igualdad: el total (6 cartas) es dado primero. En las ecuaciones E3 y E4 hay más que un sobre. Como la profesora explicó a los estudiantes, cada sobre contiene el mismo número desconocido de cartas. Podemos notar que las ecuaciones E3 y E4 presentan nuevas dificultades: ahora los sobres o incógnitas se observan a ambos lados de la igualdad. El trabajo pionero de Filloy y Rojano (1989) muestra muy bien la diferencia conceptual que existe entre la ecuación E2 (de tipo $ax + b = c$) y las ecuaciones E3 y E4 (de tipo $ax + b = cx + d$). En la ecuación E3, la operación de sustracción debe ser aplicada ahora no solamente a las cartas, sino también a los sobres. Nuestro diseño es tal que se prepara a los estudiantes para enfrentar el segundo tipo de ecuaciones a través de la generalización de ideas algebraicas desarrolladas en la discusión general y en la solución de la ecuación E1.

La ecuación E4 aporta una nueva dificultad: la aplicación de las operaciones de sustracción lleva a los estudiantes a una ecuación en donde figuran dos sobres de un lado y cuatro cartas del otro. Es necesario ahora *dividir*. En Radford (2022) se analizan en detalle los obstáculos que los estudiantes superan para resolver la ecuación. La imagen 4 muestra un pasaje de la discusión general en la cual una estudiante explica a la clase cómo resolver la ecuación E4. Después de sustraer un sobre y una carta de cada lado de la ecuación, hay que dividir por dos ambos lados de la igualdad. La imagen 4 muestra el gesto que hace la estudiante para indicar la división.

Imagen 4é La operación de división en la solución de la ecuación E4

La secuencia de los problemas de la tarea que hemos esbozado muestra el nivel de complejidad conceptual creciente de la estrategia de despejar la incógnita. La resolución de cada problema consolida los saberes previos al mismo tiempo que solicita la movilización de nuevos saberes algebraicos. Sin embargo, es importante no olvidar que la tarea deberá ser respaldada por una configuración social fuerte del aula como espacio de colaboración humana.

LA CONFIGURACIÓN FUERTEMENTE SOCIAL DEL AULA

En efecto, el diseño de la tarea y el SSC son elementos clave de nuestro diseño, pero no son suficientes. Dado que la producción de las ideas algebraicas ha sido un proceso cultural de miles de años, no es razonable esperar que los estudiantes reconstruyan esas ideas por sí mismos durante su paso por la escuela. Además de un diseño apropiado de la tarea, el aula deberá ser configurada socialmente de tal manera que, en la interacción entre estudiantes y entre estudiantes y el profesor, se generen ideas colectivas, como se mostró en la breve descripción de la discusión general donde aparece la idea algebraica de sustraer cartas de ambos lados de la ecuación.

Las ideas colectivas así generadas reflejan un concepto central de la teoría de la objetivación según el cual el aprendizaje es concebido como proceso colectivo. Siguiendo las pautas de Lev Vygotski (1991) y de Paulo Freire (2016), rompemos aquí con la línea tradicional que pone al profesor de un lado y a los estudiantes del otro.

En la configuración fuertemente social del aula, profesores y estudiantes trabajan hombro con hombro, de suerte que esta configuración procura a los estudiantes un espacio para ir dando un sentido a las ideas algebraicas y comprender, con la ayuda del profesor, la lógica que les subyace. Dicha configuración comprende la organización espacial de los estudiantes (por ejemplo, en pequeños grupos) y las formas de colaboración humana que el profesor intenta promover. En nuestro diseño, fomentamos formas de colaboración humana que promueven el respeto y la comprensión de las ideas de otros, así como posicionamientos críticos y empeño en la actividad colectiva, la solidaridad y una práctica de la responsabilidad y del cuidado del otro.

Reconocimientos

Este artículo ha sido escrito en el marco de un programa de investigación financiado por el Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH).

Referencias bibliográficas

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Freire, P. (2016). *Pedagogia da Solidariedade*. Paz & Terra.

Radford, L. (2022). Introducing equations in early algebra. *ZDM - Mathematics Education, 54*(6), 1151- 1167. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01422-x

Radford, L. (2023). *La teoría de la objetivación. Una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Uniandes. https:// bit.ly/Radford_TO

Vygotski, L. S. (1991). *Obras escogidas*, Vol. 1 (Segunda edición, 1997). Visor.

Dirección de contacto

Luis Radford

Laurentian University, Ontario (Canadá)

Lradford@laurentian.ca